

Andrea Cecilia López
UB3316SCE8058

ASIGNATURA:

TRANSPORT PHENOMENA

FENÓMENOS DE TRANSPORTE

LICENCIATURA EN INGENIERÍA QUÍMICA

Segunda Fase

Mendoza, Argentina

Noviembre 2007

Tabla de contenidos

OBJETIVOS DE LA ASIGNATURA	3
1. TRANSFERENCIA DE CALOR	3
Introducción	3
Nomenclatura.	3
Mecanismos de transferencia de calor.	3
Leyes y ecuaciones que gobiernan los Mecanismos de Transferencia de Calor.	4
Ley de Fourier.....	4
Ecuación de enfriamiento de Newton.	6
Ley de Stefan- Boltzmann	7
Flujo de calor en cuerpos grises	8
Flujo de calor neto entre cuerpos negros.....	8
Flujo de calor neto entre un cuerpo gris y un cuerpo negro.....	9
Analogía eléctrica para transferencia de calor.	9
Conducción.....	10
Convección	10
Radiación	11
Paredes compuestas	11
Paredes en serie	11
Paredes compuestas conectadas en paralelo.....	13
Coeficiente global de transferencia de calor, U	14
Resistencia de contacto.....	14
Conducción.....	16
Ecuación General de Conducción	16
Coordenadas cilíndricas.....	19
Coordenadas esféricas	20
Condiciones de bordes y condiciones iniciales	20
Conducción estacionaria sin generación unidimensional considerando, conductividad térmica constante.	22
Espesor crítico de aislamiento	26
Métodos de obtención del Número de Nusselt.	28
Correlaciones de Convección Forzada.....	29
Interpretación del número de Prandtl.....	29
Convección forzada externa sobre una placa plana.	30
Flujo laminar	31
Flujo Turbulento. Nusselt Local	32
Capa limite mixta, laminar –turbulenta. Nusselt promedio	32
2. TRANSFERENCIA DE MASA Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO.	33
2.1. Introducción a la Transferencia de Masa.	33
Definiciones básicas.....	33
Concentraciones.....	34
Primera ley de Fick.	35
Densidades de flujo.	36
Balances de materia.	38
2.2. Introducción al Transporte de Cantidad de Movimiento y Dinámica de Fluidos.	39
Transporte de cantidad de movimiento entre placas paralelas. Flujo de Couette.	39
Ley de Newton de la viscosidad.....	40
Fluidos no newtonianos.	41
Esfuerzo cortante frente a gradientes de velocidad para fluidos no newtonianos.	43
Número de Reynolds para fluidos no newtonianos.	43
2.3. ANALOGÍAS ENTRE LOS TRES FENÓMENOS DE TRANSPORTE.....	43
CONCLUSIONES	45
BIBLIOGRAFÍA	46

OBJETIVOS DE LA ASIGNATURA

El propósito de este curso es entender los fenómenos de transporte como el estudio sistemático y unificado de la transferencia de momento, energía y materia. El transporte de estas cantidades guarda fuertes analogías tanto físicas como matemáticas.

Los fenómenos de transporte pueden dividirse en dos tipos: transporte molecular y transporte convectivo. Estos a su vez pueden estudiarse en tres niveles distintos: nivel macroscópico, nivel microscópico y nivel molecular.

El estudio y la aplicación de los fenómenos de transporte es esencial para la ingeniería contemporánea, principalmente en la ingeniería química, ya que aplicados con criterio son constituyen la base para desarrollar vías económicas para el uso de materiales y energía en beneficio de la humanidad.

1. TRANSFERENCIA DE CALOR

Introducción

En primer lugar tenemos que decir que la transferencia de calor es el área de la ingeniería que estudia los diferentes mecanismos de transferencia de calor.

Definición termodinámica de calor: Es la forma de energía en tránsito, que se manifiesta debido a una diferencia de temperaturas.

Nomenclatura.

En este curso emplearemos la letra q minúscula para designar el flujo de calor.

q : Flujo de calor [W]

y q doble prima, q'' para designar el flujo de calor por unidad de área,

q'' : Flujo de calor por unidad de área [W/m^2]

Mecanismos de transferencia de calor.

Existen tres mecanismos básicos de transferencia de calor, ellos son:

- *Conducción*: Se define a la transferencia de calor que ocurrirá a través del medio en el cual existe un gradiente de temperaturas. Puede tomar lugar en sólidos, líquidos y / o gases.
- *Convección*: Se refiere a la transferencia de calor que ocurrirá entre una superficie y un fluido en movimiento como resultado de la diferencia de temperatura entre la superficie y el fluido.
- *Radiación*: Las superficies emiten energía en forma de ondas electromagnéticas. A pesar que no exista un medio (vacío) se establecerá un intercambio de calor por radiación entre dos superficies

a diferentes temperaturas. Esta característica que tiene la radiación térmica de no necesitar de medio es precisamente la que la distingue de los dos mecanismos anteriores.

$$T_1 > T_2$$

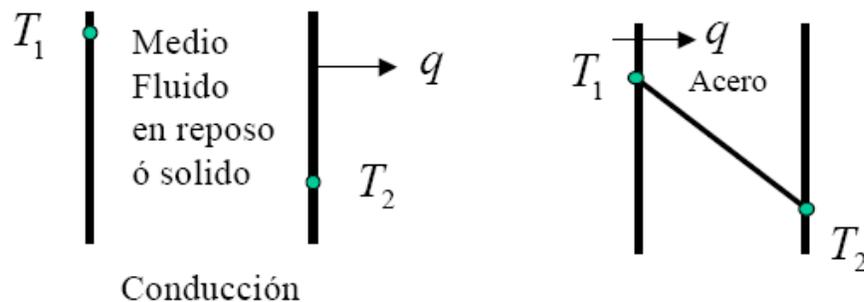


Figura 1.1 Ejemplo de conducción.

En la Figura 1.1 se ilustra la situación en donde el mecanismo de conducción esta presente, esta corresponde al caso de una pared plana que esta expuesta a dos temperaturas, como consecuencia de esta diferencia de temperaturas se establecerá un flujo de calor a través de la pared. Es importante señalar que si se considera el flujo de calor unidimensional y la conductividad térmica constante, la distribución de temperaturas en la pared será lineal.

Leyes y ecuaciones que gobiernan los Mecanismos de Transferencia de Calor.

- Ley de Fourier. Conducción
- Ecuación de enfriamiento de Newton. Convección
- Ley de Stefan-Boltzmann. Radiación

Ley de Fourier.

Es la ley física que describe matemáticamente el mecanismo de transferencia de calor por conducción.

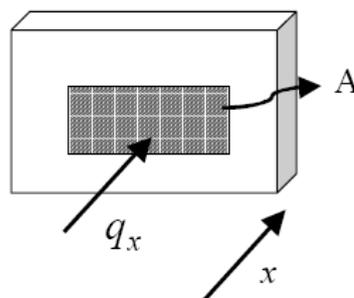


Figura 1.2 Ley de Fourier

Con referencia a la figura 1.2, la ley de Fourier establece:

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx}$$

Donde:

q_x : Flujo de calor por conducción

A : área transversal [m^2]

$\frac{dT}{dx}$: gradiente de temperaturas $\frac{K}{m}$

k : conductividad, [W/mK]

En la ley de Fourier, la conductividad Térmica k , es una propiedad del medio. En general, la conductividad térmica k , es una propiedad que depende de la temperatura.

A continuación se presenta una Tabla 1.1 representativa de la conductividad térmica de diferentes materiales.

Material	W/mK
Plata	427
Cobre	400
Aluminio	236
Hierro	80
Madera	0,15
Agua	0.60
Aire	0.025

Tabla 1.1. Conductividad Térmica de diferentes materiales a 300 K.

En el signo menos que aparece en la ley de Fourier, es una consecuencia de satisfacer la segunda Ley de la Termodinámica que para este caso impone que el flujo de calor debe darse siempre, desde la región de mayor temperatura hacia la región de menor temperatura.

En la figura 1.3 se ilustra que si el gradiente de temperaturas es negativo el flujo de calor, según el sistema de coordenadas señalado debe ser positivo, y en caso de ser el gradiente de temperaturas positivo, el flujo de calor debe ser negativo.

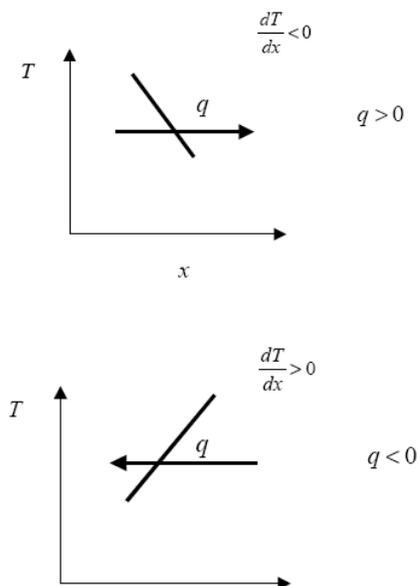


Figura 1.3. Justificación del signo menos en la Ley de Fourier.

Ecuación de enfriamiento de Newton.

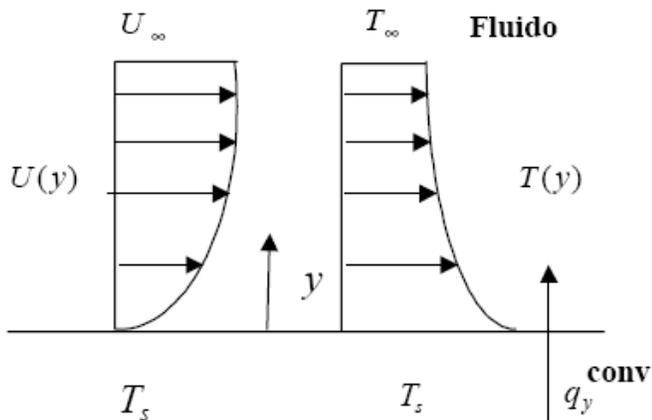


Figura 1.4.

Las condiciones de corriente libre se suceden en donde los valores de U_∞ y T_∞ se hacen independientes de y . Es importante señalar la naturaleza empírica que tiene la ecuación de Newton, la cual haciendo referencia a la Figura 1.4, se establece lo siguiente:

$$q^{conv} = h A (T_s - T_\infty)$$

Donde:

q^{conv} : Flujo de calor por convección [W]

h : coeficiente de transferencia de calor por convección [$W / m^2 K$]

A : área de contacto entre el fluido y la pared [m^2]

En la ecuación de Newton, h no es una propiedad termofísica ya que depende de una gran variedad de factores tanto geométricos como fluidodinámicos.

Ley de Stefan- Boltzmann

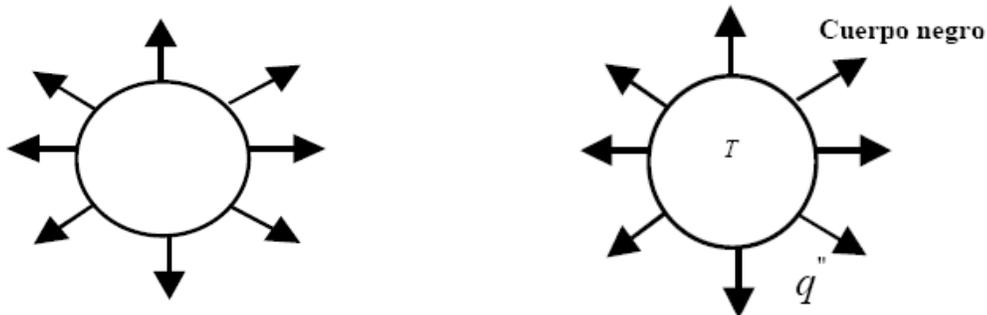


Figura 1.5. Ley de Stefan- Boltzmann

La ley de Stefan- Boltzmann, establece que si un cuerpo se encuentra a una determinada temperatura, este emite calor que viene cuantificado por:

$$q^{rad} = \sigma AT^4$$

Donde:

q^{rad} = Flujo de calor por radiación, [W]

T = Temperatura absoluta, [K]

σ = Constante de Stefan- Boltzmann, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} [W / m^2 K^4]$

La ley de Stefan-Boltzmann, aplica a los denominados cuerpos negros, que son aquellos cuerpos que emiten la mayor cantidad de calor posible.

En la práctica los cuerpos negros son una idealización, en realidad los cuerpos reales solamente emiten una fracción de la energía que emite un cuerpo negro. A dichos cuerpos se les denominan **cuerpos grises**.

Flujo de calor en cuerpos grises

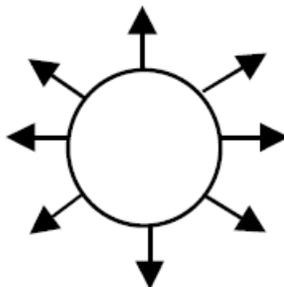


Figura 1.6. Flujo de calor en cuerpos grises

Para el caso de cuerpos grises la ecuación de Stefan- Boltzmann se modifica, incluyendo la emisividad Térmica ε , de forma que para un cuerpo gris, el flujo de calor viene dado por:

$$q^{rad} = \varepsilon \sigma A T^4$$

ε = Emisividad (adimensional)

La Emisividad depende de la temperatura y el acabado superficial y varia entre. $0 < \varepsilon < 1$

A continuación se presenta en la Tabla 1.2 los valores característicos de la emisividad para una temperatura de 300 K.

Material	ε (300 K)
Aluminio Pulido	0,04
Anodizado	0,82
Acero Pulido	0,17
Oxidado	0,87
Asfalto	0,87 - 0,93
Madera	0,82 - 0,92

Tabla 1.2. Emisividad de diversos materiales a 300 K

Flujo de calor neto entre cuerpos negros.

Para cuantificar el flujo neto de calor entre dos cuerpos negros, se puede realizar usando la siguiente expresión:

$$q = \sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

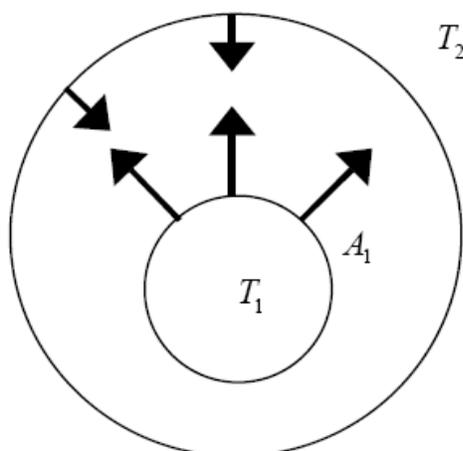


Figura 1.7. Flujo de calor neto entre cuerpos negros

Flujo de calor neto entre un cuerpo gris y un cuerpo negro

Para la situación en la cual el cuerpo 1 es un cuerpo gris y el cuerpo 2 es un cuerpo negro, el flujo de calor, se calcula mediante:

$$q = \sigma A_1 \varepsilon_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

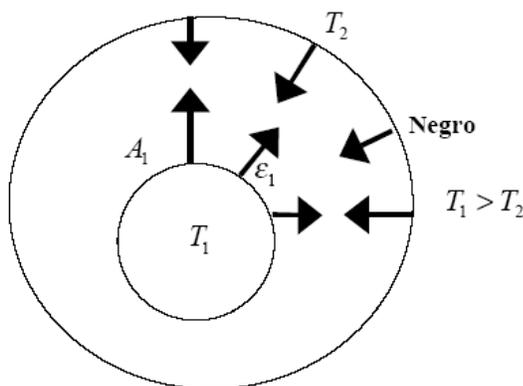


Figura 1.8. Flujo de calor entre un cuerpo gris y un cuerpo negro.

Analogía eléctrica para transferencia de calor.

Una práctica muy utilizada para la resolución de problemas de transferencia de calor, es la aplicación de la analogía eléctrica, la cual establece una analogía entre las siguientes variables:

Electricidad
Intensidad, i

Transferencia de calor
Flujo de calor, q

Voltaje, V

Ley de Ohm, $I = \frac{\Delta V}{R_{elec}}$

Temperatura, T

$$q = \frac{\Delta T}{R_{tér}}$$

En esencia, la analogía eléctrica consiste en identificar la resistencia térmica, $R_{tér}$.

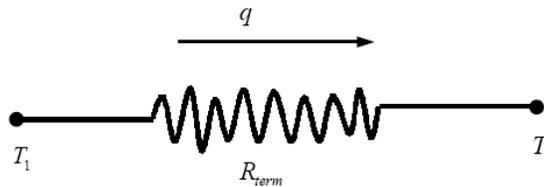


Figura 1.9. Analogía eléctrica

A continuación se realiza la determinación de la resistencia térmica, asociada a cada mecanismo.

Conducción

$$q = KA \frac{T_1 - T_2}{L} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L}{KA}}$$

de manera que $R_{term} = R_c$

$$R_c = \frac{L}{KA}$$

Convección

$$q = hA(T_1 - T_2)$$

$$R_h = \frac{1}{hA}$$

Radiación

$$q : \sigma A \varepsilon (T_1^4 - T_2^4)$$

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{T_1 - T_2}{\sigma A \varepsilon (T_1^4 - T_2^4)}}$$

$$R_r = \frac{T_1 - T_2}{\sigma A \varepsilon (T_1^4 - T_2^4)}$$

Con frecuencia se habla de un coeficiente de transferencia de calor por radiación, el cual se expresa mediante:

$$h_r = \frac{\sigma \varepsilon (T_1^4 - T_2^4)}{(T_1 - T_2)}$$

Los resultados anteriores se pueden resumir en la Tabla 1.3:

Mecanismo	Resistencia
Conducción	$\frac{L}{KA}$
Convección	$\frac{1}{hA}$
Radiación	$\frac{T_1 - T_2}{\sigma \varepsilon (T_1^4 - T_2^4)}$

Tabla 1.3. Resistencia Térmica para cada mecanismo.

Paredes compuestas

Paredes en serie

En la practica se presentan paredes compuestas por diversos materiales, en la figura 1.10 se esquematiza una pared compuesta de tres materiales a,b,c dispuestas en serie. En la figura se presenta el circuito eléctrico análogo al problema térmico de las tres paredes conectadas en serie.

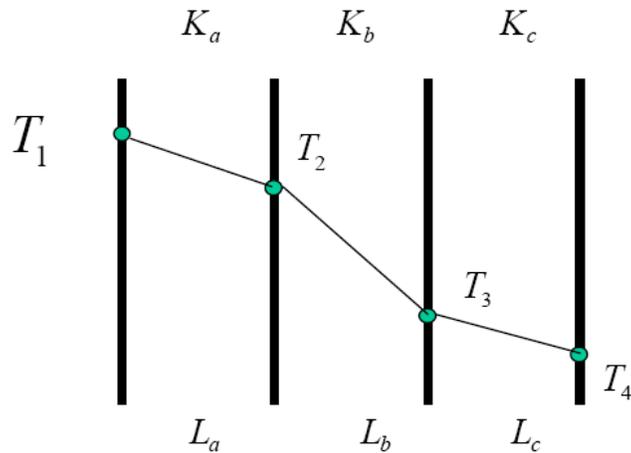


Figura 1.10. Paredes compuestas conectadas en serie

Circuito eléctrico análogo

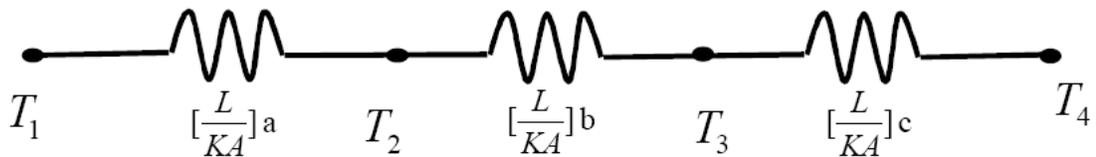


Figura 1.11. Circuito eléctrico análogo para paredes compuestas conectadas en serie.

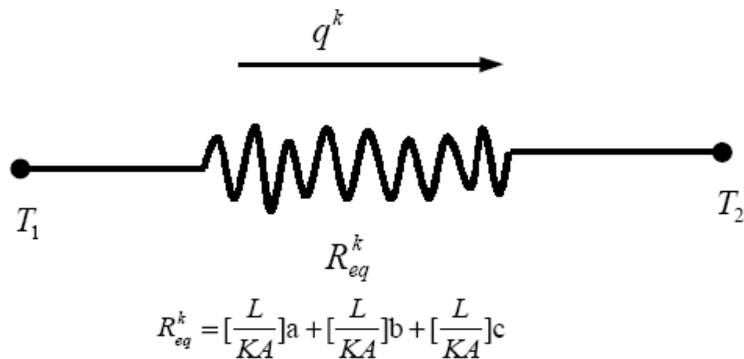


Figura 1.12. La resistencia térmica equivalente, R_{eq}^k , para paredes conectadas en serie.

La resistencia térmica equivalente, R_{eq}^k , para paredes conectadas en serie, se calcula recordando que cuando las resistencias se encuentran en serie, la resistencia equivalente es la suma de las resistencias individuales.

$$q = \frac{T_1 - T_4}{(\frac{L}{KA})_a + (\frac{L}{KA})_b + (\frac{L}{KA})_c}$$

Paredes compuestas conectadas en paralelo

A continuación se ilustra la situación de una pared compuesta formada por dos materiales, a,b que están conectadas en paralelo.

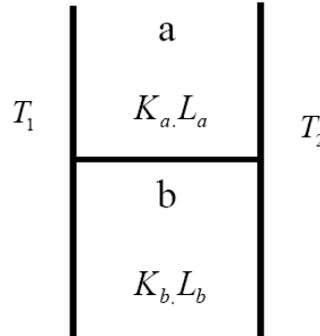


Figura 1.13. Pared compuesta conectada en paralelo

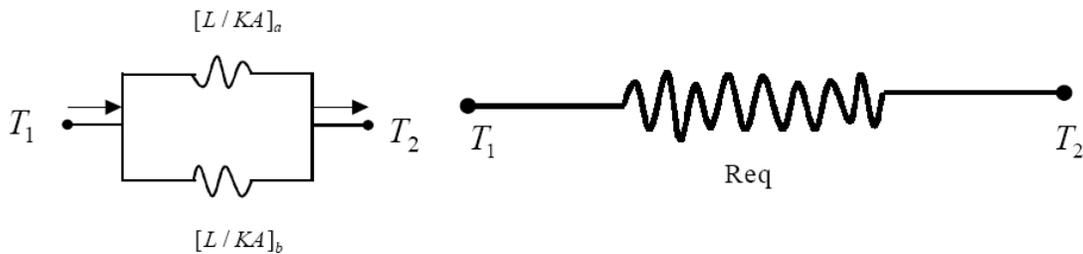


Figura 1.14. Circuito eléctrico análogo para una pared compuesta conectada en paralelo.

La resistencia térmica equivalente se calcula recordando que la resistencia equivalente de resistencias conectadas en paralelo viene dado por:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b}$$

$$R_{eq} = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b}$$

$$R_{eq} = \frac{\left(\frac{L}{KA}\right)_a \cdot \left(\frac{L}{KA}\right)_b}{\left(\frac{L}{KA}\right)_a + \left(\frac{L}{KA}\right)_b}$$

$$q = \frac{T_1 - T_2}{R_{eq}}$$

Coeficiente global de transferencia de calor, U

Existen ciertos tipos de problemas, principalmente relacionados con intercambiadores de calor, donde es conveniente simplificar el cálculo del calor, esto se realiza incorporando el concepto de coeficiente global de transferencia de calor, U, el cual se relaciona con el calor mediante la siguiente ecuación:

$$q = U A \Delta T_{total}$$

Donde:

U: Coeficiente global de transferencia de calor, $U = [W / m^2 K]$

Con relación a la analogía eléctrica podríamos señalar que el coeficiente Global de transferencia de calor se obtiene al reducir todo el circuito eléctrico análogo, a una sola resistencia total, la cual se relaciona con, U, a través de:

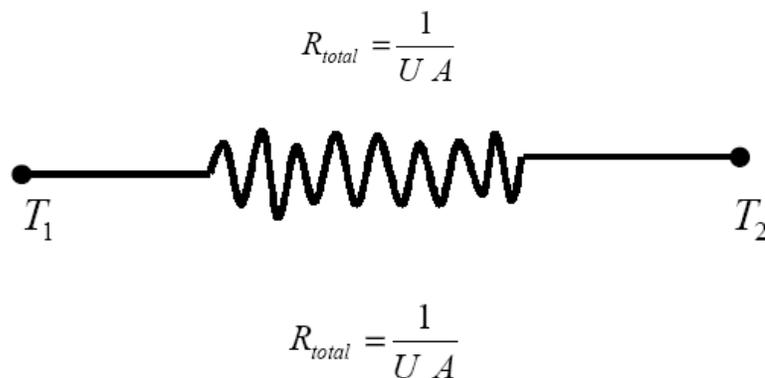
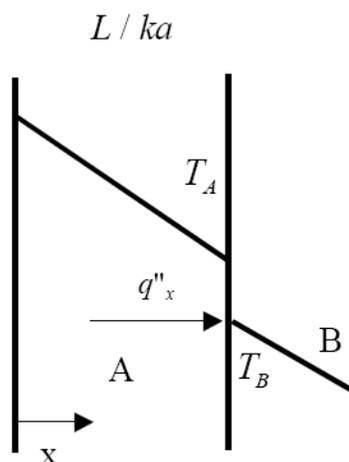


Figura 1.15. Coeficiente Global de transferencia de calor.

Resistencia de contacto

Aunque se había despreciado hasta ahora, es importante reconocer que en sistemas compuestos con distintos materiales la caída de la temperatura en la interfaz puede ser apreciable.

Esta situación se ilustra en la figura 1.16.



$$R''_{tc} = \frac{T_A - T_B}{q''_x}$$

Figura 1.16. Resistencia térmica de contacto

En la figura 1.17 se observa una ampliación de la interfaz

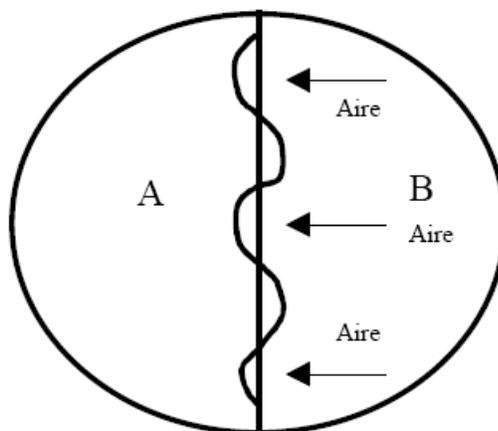
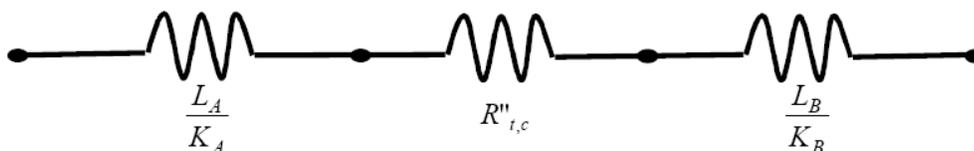


Figura 1.17. Resistencia de contacto entre dos paredes

En ella se incorpora R''_{tc} , que es precisamente la resistencia térmica de contacto. Por supuesto, si $R''_{tc} = 0$. Se satisface que $T_A = T_B$
Desde el punto de vista del cálculo, la presencia de la resistencia térmica de contacto se cuantifica añadiendo una resistencia adicional, tal como se muestra en la figura.



La resistencia térmica de contacto, $R''_{t,c}$, generalmente se determina experimentalmente.

$R''_{t,c}$ depende en general de

- Presión de contacto
- Acabado superficial

A continuación se presenta una tabla donde se muestra valores característicos de la resistencia térmica de contacto.

Resistencia térmica de contacto, $R''_{t,c} \times 10^4 [m^2 \cdot K / W]$

(a) Interfaz al vacío		(b) Fluído Interfacial		
Presión de contacto	100 kN/m^2	10.000 kN/m^2	Aire	2,75
Acero inoxidable	6 - 25	0,7 - 4,0	Helio	1,05
Cobre	1 - 10	0,1 - 0,5	Hidrogeno	0,720
Magnesio	1,5 - 3,5	0,2 - 0,4	Aceite Silicona	0,525
Aluminio	1,5 - 5,0	0,2 - 0,4	Glicerina	0,265

Tabla 1.4. Resistencia térmica de contacto para (a) Superficies metálicas bajo condiciones de vacío y (b) Interfaz de Aluminio con diferentes fluidos interfaciales.

Conducción

Ecuación General de Conducción

Considera el cuerpo sólido mostrado en la figura 1.19

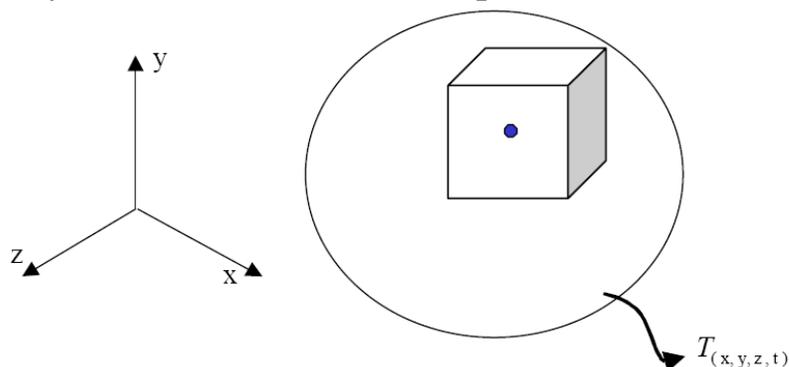


Figura 1.19. Ecuación de conducción.

Con miras a simplificar la demostración de la ecuación de conducción realizaremos el análisis, para el caso de dos dimensiones tal como se muestra en la figura 1.20.

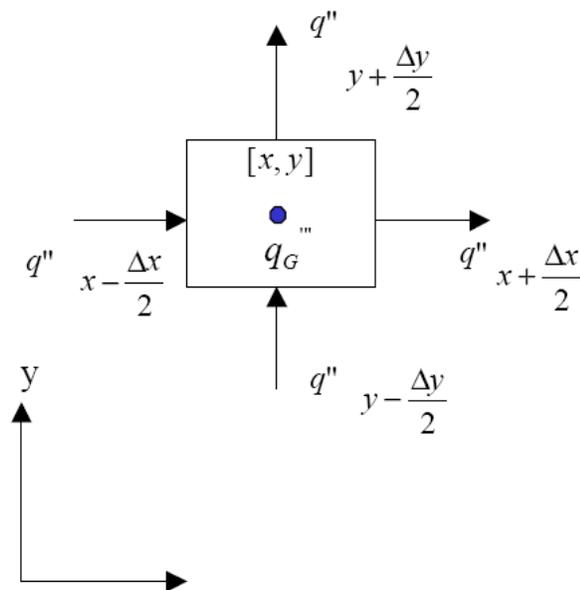


Figura 1.20. Balance de calor para el caso de dos dimensiones.

En balance de calor se han colocado los calores asociados a cada cara del volumen de control, así como el calor q''_G , Calor generado por unidad de volumen [W/m^3].

Este calor generado incorpora la posibilidad de que el cuerpo genera calor internamente, como puede ocurrir en una reacción química, en un elemento radioactivo, o bien en un conductor eléctrico. Recordando la Primera ley de la termodinámica, para un sistema cerrado, la cual establece:

$$q_{neto} - \frac{dW}{dt} = \frac{dU}{dt}$$

Y que en ausencia de trabajo e incorporando la convención de signo para la evaluación del calor neto (calor que entra es positivo, calor que sale es negativo), podemos simplificar a:

$$q_{entra} - q_{sale} + q_{gen} = \frac{dU}{dt}$$

Y evaluando cada término, tenemos:

$$\left(q''_{x-\frac{\Delta x}{2}} - q''_{x+\frac{\Delta x}{2}} \right) \Delta y \Delta z + \left(q''_{y-\frac{\Delta y}{2}} - q''_{y+\frac{\Delta y}{2}} \right) \Delta x \Delta z + q''_G \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{dU}{dt}$$

Recordando que el cambio de energía interna para un sólido se determina mediante:

$$\frac{dU}{dt} = \rho \Delta x \Delta y \Delta z C_v \frac{dT}{dt},$$

Donde C_v , es el calor específico a volumen constante.

Realizando expansiones en serie de Taylor y reteniendo solamente los términos de primer orden, se tiene para los flujos de calor en las diversas caras.

$$q''_{x-\frac{\Delta x}{2}} = q''_x - \frac{\partial q''_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

$$q''_{x+\frac{\Delta x}{2}} = q''_x + \frac{\partial q''_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

$$q''_{y-\frac{\Delta y}{2}} = q''_y - \frac{\partial q''_y}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}$$

$$q''_{y+\frac{\Delta y}{2}} = q''_y + \frac{\partial q''_y}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en el balance de calor, se tiene:

$$\left(-\frac{\partial q''_x}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y \Delta z + \left(-\frac{\partial q''_y}{\partial y} \Delta y\right) \Delta x \Delta z + q''_G \Delta x \Delta y \Delta z = \rho \Delta x \Delta y \Delta z C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

Empleando la Ley de Fourier para la determinación de los calores, tenemos:

$$q''_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q''_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}$$

Y sustituyendo finalmente en la ecuación, y simplificando por $\Delta x \Delta y \Delta z$, se llega a la Ecuación General de Conducción para el caso de dos dimensiones, 2-D

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + q''_G = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

Interpretación física de cada término de la ecuación de conducción

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q'''_G = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$


a


b


c


d

- a: Flujo neto de calor por unidad de área en la dirección x
- b: Flujo neto de calor por unidad de área en la dirección y
- c: Generación de calor por unidad de volumen
- d: Cambio energía interna por unidad de volumen

Para la situación en tres dimensiones, 3 -D, podemos escribir la Ecuación de conducción de calor:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q'''_G = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

ó en notación simbólica:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + q'''_G = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

Si la conductividad térmica es constante, entonces la ecuación se simplifica a:

$$k \nabla^2 T + q'''_G = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

A continuación se presenta la Ecuación de Conducción para sistema de coordenadas cilíndricas y esféricas.

Coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_G''' = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

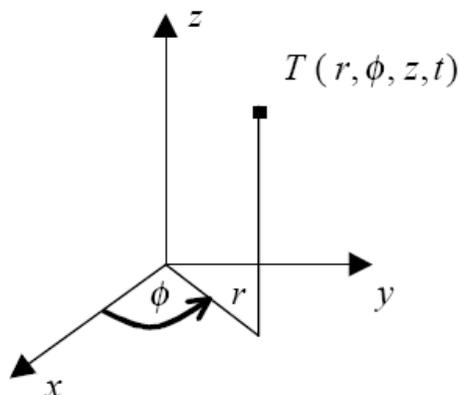


Figura 1.21. Sistema de coordenadas cilíndricas

Coordenadas esféricas

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{Sen}^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \text{Sen}^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \text{Sen} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + q_G''' = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

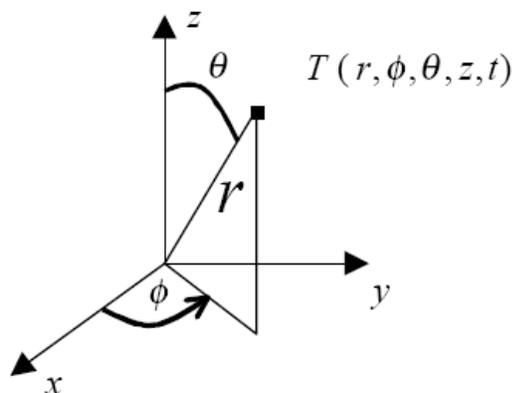


Figura 1.22. Sistema de coordenadas esféricas.

Condiciones de bordes y condiciones iniciales

Para poder ser realizada la integración de la ecuación general de conducción, en términos matemáticos es menester incluir las condiciones iniciales y de borde. En general, por ser la ecuación general de conducción de primer

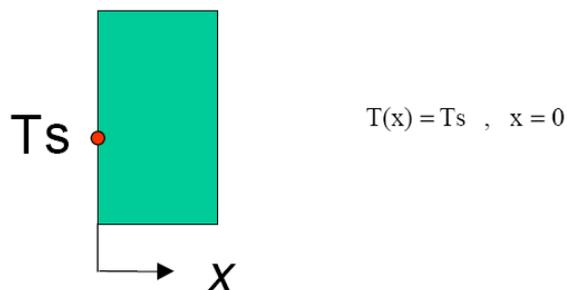
orden en tiempo se requiere del establecimiento de una única condición inicial.

La condición inicial se refiere a la distribución de temperatura que existe en el instante de tiempo inicial.

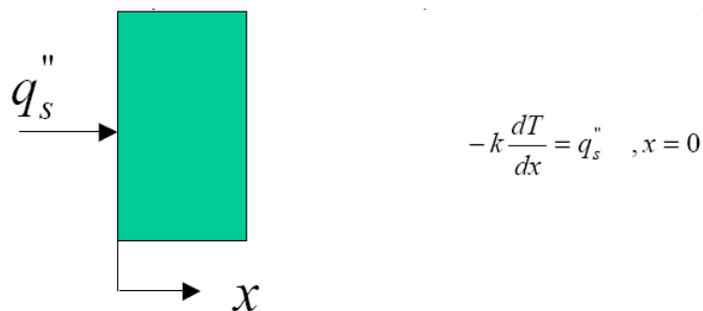
Condición Inicial: $T(x, y, z, t=0) = T_i(x, y, z)$

Para el caso de las condiciones de borde; se observa que en las variables espaciales (x, y, z) , la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación general de conducción es dos; por tanto se requiere el establecimiento de dos condiciones de borde por cada variable espacial. A continuación incluimos un conjunto de condiciones de borde que aparecen con frecuencia en la formulación de problemas de conducción.

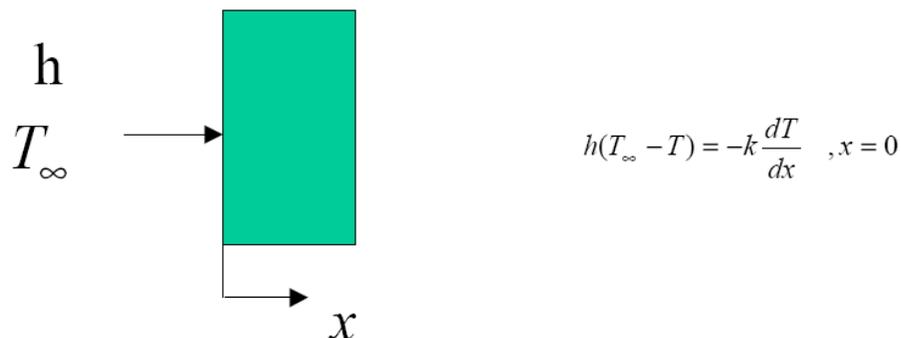
1. Temperatura especificada constante (condición de Dirichlet)



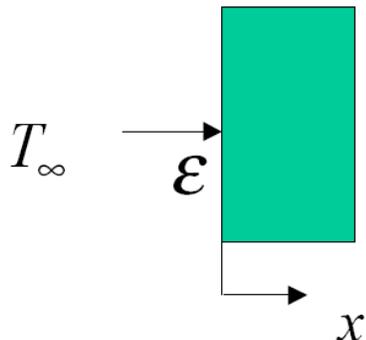
2. Flujo de calor especificado constante (condición de Neuman)



3. Ambiente convectivo (Robin)

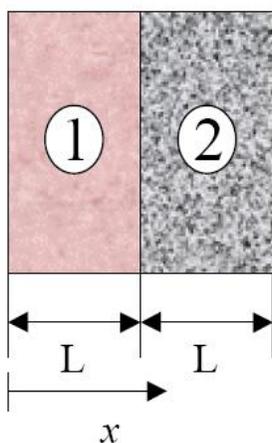


4. Ambiente radiativo



$$\epsilon\sigma(T_{\infty}^4 - T^4) = -k \frac{dT}{dx}, x = 0$$

5. Condición de Interfase



$$T_1 = T_2, x = L$$

$$-k_1 \frac{dT_1}{dx} = -k_2 \frac{dT_2}{dx}, x = L$$

Conducción estacionaria sin generación unidimensional considerando, conductividad térmica constante.

La ecuación que gobierna dicha situación es la siguiente:

$$\nabla^2 T = 0$$

Placa plana

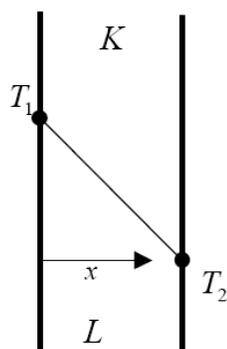


Figura 1.23. Conducción en una placa plana.

La ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

Y sus correspondientes condiciones de borde son:

$$T = T_1 \quad , x = 0$$

$$T = T_2 \quad x = L$$

Integrando la ecuación se obtiene:

$$T = C_1 x + C_2$$

Donde las constantes de integración se evalúan haciendo uso de las condiciones de borde, obteniéndose finalmente, el perfil de temperatura:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

Que comprueba que la distribución de temperatura en una placa plana, es lineal. La determinación del flujo de calor se realiza con la ayuda de la ley de Fourier.

$$q = -KA \frac{dT}{dx} = \frac{KA}{L} (T_1 - T_2)$$

Que demuestra que la expresión de la resistencia térmica por conducción es:

$$R_{Pl} = \frac{L}{KA}$$

Cilindro

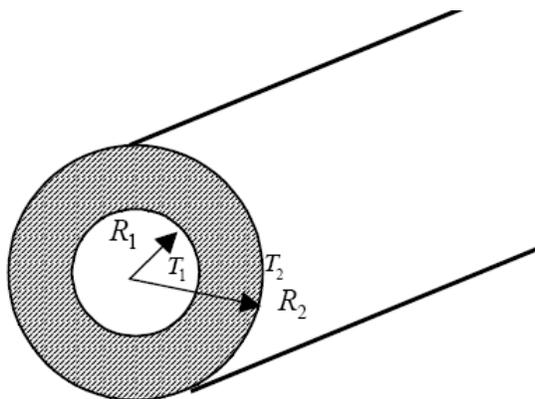


Figura 1.24. Geometría Cilíndrica

La ecuación diferencial es;

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

Con las siguientes condiciones de borde:

$$T = T_1 \quad \text{para } r = R_1$$

$$T = T_2 \quad \text{para } r = R_2$$

Integrando la ecuación se obtiene

$$T = C_1 \ln r + C_2$$

Y evaluando las constantes, se tiene:

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) + T_2$$

Y el flujo de calor se calcula mediante:

$$q_r = -KA \frac{dT}{dr} = -K (2\pi rL) \frac{dT}{dr}$$

Y que evaluando se arriba a:

$$q_r = 2\pi Lk \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Que extendiendo la analogía eléctrica para el caso del cilindro se tiene que:

$$R_{cil} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi Lk}$$

Esta última expresión es de mucha utilidad práctica, cuando se desea aplicar a una tubería.

Esfera

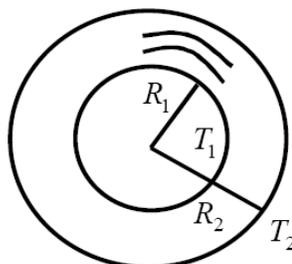


Figura 1.25. Concha esférica.

La ecuación para la concha esférica es:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

Con las condiciones de borde:

$$T = T_1 \quad \text{para } r = R_1$$

$$T = T_2 \quad \text{para } r = R_2$$

Al integrar la ecuación se obtiene:

$$T = T_2 + \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)$$

y el flujo de calor viene expresado por:

$$q_r = \frac{4\pi k(T_1 - T_2)}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

De manera que la resistencia térmica para el caso de la geometría esférica es:

$$R_{esf} = \frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}{4\pi k}$$

En la Tabla 1.5 se resume las resistencias térmicas para cada geometría.

Geometría	Resistencia Térmica
Placa plana	$R_{pl} = \frac{L}{KA}$
Cilindro	$R_{cil} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi kL}$
Esfera	$R_{esf} = \frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}{4\pi k}$

Tabla 1.5

Espesor crítico de aislamiento

Con mucha frecuencia se plantea la situación de disminuir el flujo de calor, por tal motivo a continuación discutiremos los elementos más importantes para llevar a feliz término el diseño y la escogencia del aislante.

Para iniciar la discusión comenzaremos presentando el caso de añadir aislante a una pared plana, tal como se muestra en la Figura 1.26

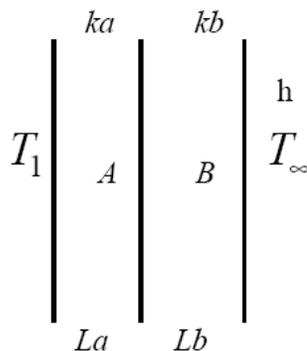


Figura 1.26. Aislamiento de una pared plana

En la Figura 1.26 se muestra una pared plana, material A, al cual se le agrega un material aislante, B. La expresión para el flujo de calor viene dado por:

$$q = \frac{T_1 - T_\infty}{\frac{L_a}{k_a A} + \frac{L_b}{k_b A} + \frac{1}{hA}}$$

Si la expresión anterior L_a , K_a , A y h son conocidos se puede construir la gráfica del flujo de calor versus la longitud del aislante, L_b . En forma cualitativa la gráfica luciría de la siguiente forma:

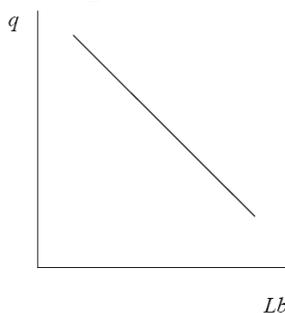


Figura 1.27.

En ella se observa que en la medida que L_b se incrementa, el flujo de calor disminuye. En el caso de que la geometría que deseamos aislar sea de forma cilíndrica, tendríamos la siguiente situación.

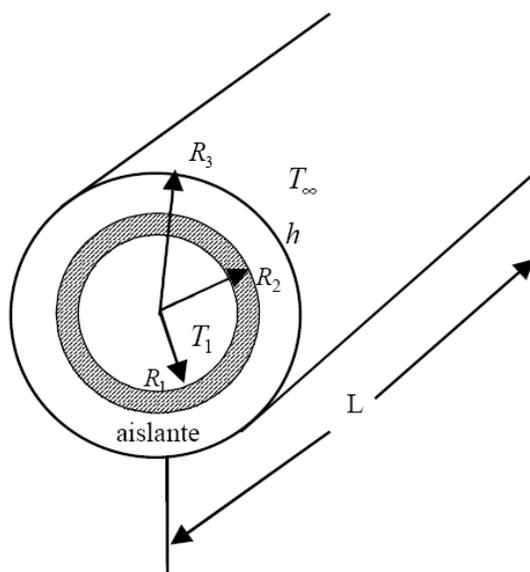


Figura 1.28. Aislamiento de una geometría cilíndrica.

La expresión del flujo de calor viene dada por:

$$q = \frac{T_0 - T_\infty}{\frac{1}{h_i 2\pi R_1 L} + \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi L k_i} + \frac{\ln \frac{R_3}{R_2}}{2\pi L k_a} + \frac{1}{h 2\pi R_3 L}}$$

Si en la expresión anterior todas las variables se mantienen fijas a excepción de R_3 se tendría la siguiente gráfica del flujo de calor en función del radio del aislante, R_3 .

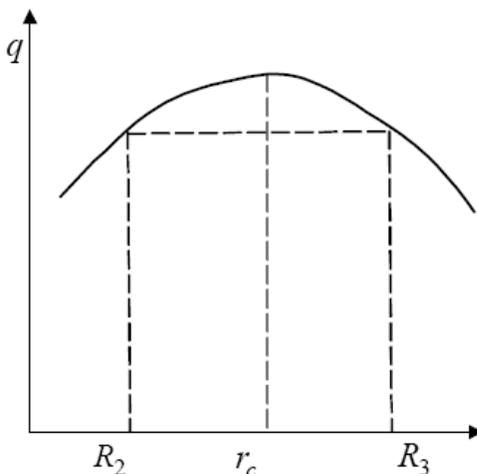


Figura 1.29. Espesor crítico de aislamiento.

En la Figura 1.29 se observa que si la tubería se encuentra desnuda, caracterizada por el hecho que $R_3 = R_2$ se tiene un determinado flujo de calor, si a la tubería desnuda se le agrega un aislante se observa que el flujo de calor empieza a aumentar, contrario al objetivo buscado, este incremento del flujo de calor se sucede hasta que el flujo de calor alcanza un máximo, que se obtiene precisamente cuando el radio del aislante, R_3 , coincide con el radio crítico de aislamiento, r_c , y es precisamente a partir de valores superiores a r_c , que el flujo de calor comenzara a disminuir, tal como se desea. Según lo antes señalado la determinación del radio crítico de aislamiento es de vital importancia para realizar un adecuado aislamiento. La determinación del radio crítico de aislamiento se realiza reconociendo que la resistencia térmica debe alcanzar un mínimo, o sea que:

$$R_{term} = \frac{1}{h_i 2\pi R_1 L} + \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi L k_t} + \frac{\ln \frac{R_3}{R_2}}{2\pi L k_a} + \frac{1}{h 2\pi R_3 L}$$

Si en la expresión anterior se mantiene todas las variables constantes a excepción de R_3 , se obtendrá un mínimo para $R_3 = r_c$. En términos matemáticos se debe cumplir que:

$$\frac{dR_{term}}{dR_3} = 0$$

Realizando la derivación antes señalada se tiene:

$$\frac{dR_{term}}{dR_3}(R_3 = r_c) = 0 = \frac{1}{R_3} - \frac{1}{2\pi k a L} - \frac{1}{2\pi h R_3^2 L}$$

Simplificando se llega a:

$$r_c = \frac{k a}{h}$$

Es decir el radio crítico de aislamiento depende de la conductividad térmica del material aislante y del coeficiente de transferencia de calor, h , Para realizar una selección adecuada del aislante se debe verificar siempre que el radio crítico de aislamiento sea inferior al radio de la tubería desnuda.

Métodos de obtención del Número de Nusselt.

Existen dos formas de determinar el número de Nusselt, una de ellas es la experimental, la cual da lugar a correlaciones empíricas y la otra mediante el modelaje matemático que implica la resolución de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno fluidodinámico y el fenómeno térmico.

La integración de dichas ecuaciones se realiza mediante técnicas numéricas. El método experimental, consiste en realizar experiencias que involucran al proceso de convección que se desee estudiar, generalmente se realiza previamente un análisis dimensional, con la ayuda del Teorema de p-Buckingham para así, determinar la dependencia del Número de Nusselt con los demás parámetros adimensionales que caracterizan el problema estudiado. Este proceso es costoso, pero a la vez es sencillo porque no requiere conocer a fondo las ecuaciones que rigen el proceso. En cambio la técnica de simulación numérica es relativamente económica, ya que cambiar una condición del proceso, por decir una temperatura, implica solamente teclear un dato en la computadora.

Ahora obviamente, el resultado será confiable en la medida que el modelo matemático reproduzca al proceso real. Afortunadamente, hoy en día, con el desarrollo espectacular que ha tenido la computación, es posible realizar simulaciones que antiguamente eran imposibles de pensar.

Dada la complejidad del tema, sólo se presentarán aquí las correlaciones más populares y para las situaciones más corrientes. También es cierto que constantemente se realizan nuevas contribuciones, que se publican periódicamente en las diferentes revistas especializadas en el área de transferencia de calor.

Correlaciones de Convección Forzada

El propósito de esta sección es presentar una colección de las relaciones más ampliamente usadas para la determinación del Número de Nusselt por convección forzada. Algunas de estas relaciones tienen bases teóricas, y otras son completamente experimentales. En ciertas circunstancias más de una ecuación será presentada, en donde se señalará la más recomendable. Las correlaciones para convección Forzada presentan la siguiente relación funcional:

$$Nu = f(Re, Pr)$$

Donde:

Nu : Número de Nusselt

Re : Número de Reynolds, UL/ν

Pr : Número de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$

El número de Reynolds ya es familiar para nosotros, así que dedicaremos las próximas líneas a comentar el significado del número de Prandtl, Pr .

Interpretación del número de Prandtl

El número de Prandtl, es un número adimensional que involucra a la viscosidad cinemática del fluido, con su difusividad térmica:

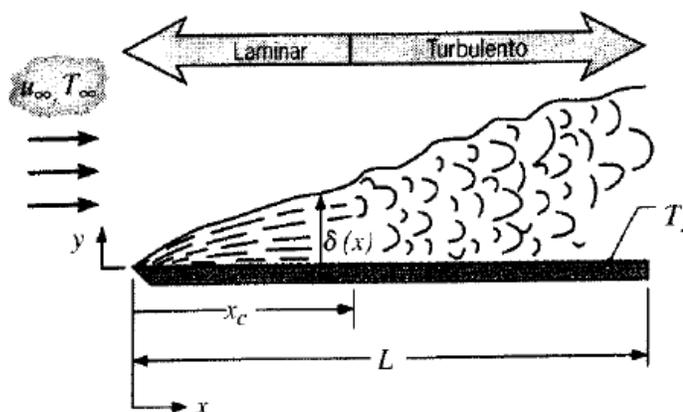
$$Pr = \frac{[\text{Difusividad de Cantidad de Movimiento}]}{[\text{Difusividad Térmica}]} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{k}{\rho C_p}} = \frac{\mu C_p}{k}$$

A continuación se presentan valores característicos del número de Prandtl para diversos fluidos.

Fluido	Pr
Metales líquidos	
Sodio	0,011
Mercurio	0,0196
Bismuto	0,0142
Gases	
Aire	0,70
Dióxido de carbono (CO_2)	0,75
Monóxido de carbono (CO)	0,73
Helio	0,68
Hidrogeno	0,70
Agua	4,6
Fluidos viscosos	
Aceite de motor	3400
Glicerina	3060

En ella se puede apreciar que los metales líquidos poseen número de Prandtl muy bajos, los gases presentan la particularidad de tener un Número de Prandtl, en el entorno de 0,7, el agua, valores intermedios y finalmente los valores mayores del número de Prandtl lo presentan los fluidos viscosos.

Convección forzada externa sobre una placa plana.



Flujo laminar

Para esta situación se puede observar soluciones analíticas para el Nusselt local y Nusselt promedio, las cuales se han verificado experimentalmente.

$$Nu_x = 0,332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$$

$$\overline{Nu}_L = 0,664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$$

$$\left[\begin{array}{l} 0,6 \leq Pr \leq 50 \\ Re < Re_{x,c} \approx 5 \cdot 10^5 \end{array} \right]$$

Donde:

$$Nu_x = \frac{h \cdot x}{k}, \overline{Nu}_L = \frac{\overline{h} \cdot L}{k}$$

$$Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu}, Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu}$$

Las propiedades son evaluadas a la temperatura de película,

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2}$$

La condición de flujo laminar se especifica claramente, en términos del número de Reynolds, $Re < 5 \cdot 10^5$

El límite inferior de 0,6 es establecido para números de Prandtl dado que este es el menor valor que pueden tomar los gases. Para esta circunstancia se emplea.

$$Nu_x = 0,565 Re_x^{1/2} Pr^{1/2}$$

$$Nu_L = 1,130 Re_L^{1/2} Pr^{1/2}$$

$$\left[\begin{array}{l} Pr \leq 0,050 \\ Re < Re_{x,c} \approx 5 \cdot 10^5 \end{array} \right]$$

Las propiedades se evalúan igualmente a T_f .

Churchill y Ozoe (1973) desarrollaron una ecuación empírica que abarca todo el espectro de números de Prandtl:

$$Nu_x = \frac{0,3387 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}}{[1 + (0,0468 / Pr)^{2/3}]^{1/4}}$$

$$Pe_x \geq 100$$

$$\bar{Nu}_x = 2Nu_x = \frac{0,6774 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}}{[1 + (0,0468 / Pr)^{2/3}]^{1/4}}$$

$$[Re Pr > 100]$$

Propiedades evaluadas a Tf.

Flujo Turbulento. Nusselt Local

Para flujo turbulento, sólo correlaciones para Nusselt local, dado que los valores promedios deben tomar en cuenta la sección laminar inicial:

$$Nu_x = 0,0296 Re_x^{0,8} Pr^{1/3}, 5 \cdot 10^5 < Re_x < 10^7$$

$$[0,6 < Pr \leq 60]$$

Capa limite mixta, laminar –turbulenta. Nusselt promedio

Para una placa plana de Longitud L en la cual Re_L excede del valor critico, la transferencia de calor promedio debe contabilizar la sección laminar inicial.

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \left(\int_0^{x_c} h_{lam} dx + \int_{x_c}^L h_{turb} dx \right)$$

Realizando la operación indicada se obtiene:

$$\bar{Nu}_L = [0,037 Re_L^{0,8} - 872] Pr^{1/3}, 5 \cdot 10^5 < Re_L < 10^7$$

$$\left[\begin{array}{l} 0,6 < Pr \leq 60 \\ Re_{x,c} > 5 \cdot 10^5 \end{array} \right]$$

2. TRANSFERENCIA DE MASA Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

2.1. Introducción a la Transferencia de Masa.

La transferencia de masa por difusión molecular es el tránsito de masa como resultado de una diferencia de concentración en una mezcla.

Existen numerosos ejemplos cotidianos de transporte de materia: la difusión de humo y otros contaminantes en la atmósfera; la transferencia de soluto entre las fases de un absorbedor de gas, un extractor o en una torre de enfriamiento; la mezcla del azúcar en un pocillo de tinto; el secado de la ropa (difusión del vapor de agua en el aire); el intercambio de oxígeno - gas carbónico en los pulmones.

Supongamos un cristal de permanganato de potasio en un vaso con agua. Las moléculas disueltas del cristal difunden lentamente desde la región de alta concentración en el fondo, tendiendo a convertir uniforme la concentración (Proporcional a la intensidad del color) con el tiempo. Este tipo de difusión se debe al movimiento errático de las moléculas y se denomina difusión molecular. De otra parte, la corriente de humo que sale desde una chimenea en un día con mucho viento, el humo se dispersa en la atmósfera debido a las fluctuaciones de velocidad y dirección del viento: se llama Dispersión o Difusión Turbulenta.

Ahora, así como en el transporte de calor, el transporte de masa puede ocurrir tanto por difusión como por convección, esta última representa el transporte de masa que resulta del movimiento global del fluido y la primera el transporte debido a gradientes de concentración.

De nuevo, como en transporte de calor, el transporte convectivo de masa consiste de dos tipos: convección forzada, en la que el movimiento es generado por una fuerza externa, y convección libre, un efecto de flotación en el cual el movimiento global se desarrolla naturalmente como consecuencia de cambios de densidad originados en las diferencias de concentración del medio.

Definiciones básicas.

La difusión es más compleja que el flujo viscoso o la transmisión de calor debido a la innovación de tener que operar con mezclas. En una mezcla que difunde las velocidades de los componentes individuales son distintas y existen varios métodos adecuados para promediar las velocidades de los componentes con el fin de obtener la velocidad local de la mezcla. La elección de esta velocidad local es necesaria para poder definir las velocidades de difusión. Por lo tanto debemos estudiar con detalle las definiciones de concentraciones, velocidades y densidades de flujo (no se

exponen conceptos físicos nuevos pero se trata de familiarizarnos con estas definiciones).

Adoptamos una regla de notación: cuando se consideran sistemas de dos componentes se especifican las especies A y B. En sistemas de varios componentes se especifican las especies 1, 2, 3, etc., o bien en las discusiones generales se utiliza un subíndice supuesto tal como i, j, k para referir las diferentes especies. Las fórmulas cuya validez se limita a sistemas binarios se identifican fácilmente porque intervienen los subíndices A y B.

Concentraciones.

La concentración de las especies en un sistema de varios componentes puede expresarse de diversas formas pero nosotros consideramos sólo las cuatro siguientes:

Concentración másica volumétrica ρ_i que es la masa de la especie i por unidad de volumen de solución.

Concentración molar $c_i = \rho_i/M_i$ (densidad molar) que es el número de moles de la especie i por unidad de volumen de solución. M_i , peso molecular de la especie i .

Fracción másica $w_i = \rho_i/\rho$ es la concentración de masa de la especie i dividida por la densidad total de la solución.

Fracción molar $x_i = c_i/c$ que es la concentración molar de la especie i dividida por la concentración molar de la solución. Frecuentemente usaremos y_i en el caso de gases. Para el caso que sea aplicable la ley de los gases perfectos, las presiones parciales son también una medida de la concentración: $P_T = p_A + p_B$; $P_T V = nRT$; $p_A V = n_A RT$; $p_B V = n_B RT$; $p_A/P_T = n_A/(n_A + n_B) = y_A$. Aquí n indica número de moles.

Mediante la palabra solución se designa una mezcla gaseosa, líquida o sólida que forma una sola fase. Para el caso de sistemas binarios la mutua relación de estas unidades de concentración es

$\rho = \rho_A + \rho_B$ = densidad de la solución (masa/volumen de solución)

$\rho_A = c_A M_A$ (masa de A/volumen de solución)

$w_A = \rho_A/\rho$ = fracción de masa de A.

$M = \rho/c$ peso molecular medio de la mezcla

$x_A + x_B = 1$; $w_A + w_B = 1$; $x_A M_A + x_B M_B = M$

$w_A/M_A + w_B/M_B = 1/M = (\rho_A/\rho M_A) + (\rho_B/\rho M_B) = (c_A + c_B)/\rho = c/\rho$

$$x_A = (w_A/M_A)/(w_A/M_A + w_B/M_B); dx_A/dw_A = [M_A M_B (w_A/M_A + w_B/M_B)^2]^{-1}$$

$$w_A = (x_A M_A)/(x_A M_A + x_B M_B); dw_A/dx_A = M_A M_B (x_A M_A + x_B M_B)^{-2}$$

Primera ley de Fick.

Para definir algunos de los términos usados en el estudio de la difusión consideremos un ejemplo simple y de geometría similar al usado en las otras formas de transporte. Dos placas grandes se colocan a una distancia b , pequeña en comparación con las otras dimensiones de la placa. El aire entre ambas está inicialmente seco y permanece libre de corrientes. En el momento $t = 0$ la placa inferior se humedece completamente en un líquido (digamos agua) y así se mantiene para asegurar que la película de fluido adyacente a la misma conserve una concentración uniforme de vapor del líquido e igual al de saturación a la temperatura y presión del sistema. La placa superior está constituida de un material fuertemente adsorbente (sílica - gel si el vapor es de agua) que garantice que la película de fluido vecina a la placa superior permanece a concentración cero. A medida que transcurre el tiempo la humedad penetra en la película gaseosa hasta que alcanza la placa superior y eventualmente pasado un espacio de tiempo suficientemente grande alcanza el estado estacionario donde el perfil de concentraciones no cambiará más con el tiempo (ver figura 2.1b). En el experimento que nos ocupa para la película gaseosa completamente estancada se ha encontrado que:

$$J_{Az}^* = -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial z} \quad [\text{moles de A/tiempo.área}] \quad (2.1)$$

Aquí D_{AB} , la propiedad de transporte, es la difusividad másica de la especie A a través de la especie B . Esta ecuación es una forma simplificada de la primera ley de Fick de la difusión, que mantiene su validez para soluciones binarias diluidas de densidad constante, y que nos dice que la difusión molecular es proporcional al gradiente de concentraciones y que ocurre en el sentido en el cual decrece este. Un análisis riguroso basado en la termodinámica de los procesos irreversibles muestra que el gradiente de potencial correcto no es el gradiente de concentraciones sino el gradiente de potencial químico y que, para mezclas multicomponentes, deben incluirse los gradientes de las otras especies en la ecuación. Sin embargo se acostumbra asumir para mezclas multicomponentes que la especie B representa todos los componentes diferentes de A .

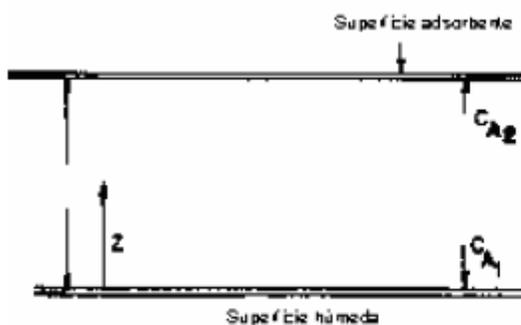


Fig. 2.1.a.

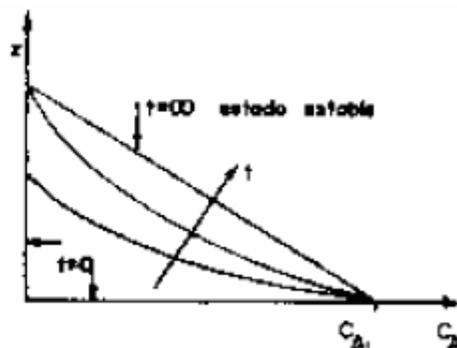


Fig. 2.1.b.

Para el caso en el cual se presentan gradientes de concentración en más de una dirección podemos expresar la ley de Fick haciendo uso del operador nabla (ecuación 1.4):

$$J_A^* = -D_{AB} \nabla(C_A)$$

Densidades de flujo.

Supongamos un fluido puro que es transportado por un conducto circular de área transversal A . Su caudal puede expresarse como $Q' = v_A$ en unidades de longitud al cubo por unidad de tiempo, donde v es la velocidad másica promedio y A es el área seccional del conducto. El caudal másico se expresa como $m' = \rho Q'$ con dimensiones de masa por unidad de tiempo. Podemos definir entonces la densidad de flujo másico referido a ejes estacionarios como:

$$n = m'/A = \rho v \text{ [masa/tiempo.área]}$$

Si pensamos ahora que el fluido está constituido por dos especies A y B , la densidad de flujo másico de la mezcla podría definirse simplemente como $n = n_A + n_B$

La velocidad de un objeto único es intuitivamente clara. La velocidad de un conjunto de partículas que se mueven pero mantiene la misma posición relativa entre ellas es la misma de cualquier partícula individual. Pero la velocidad de este conjunto se vuelve confusa si las partículas se mueven con velocidades diferentes, que es lo que ocurre en una mezcla que presenta gradientes de concentración o sea que difunde. Si llamamos v_A a la velocidad de la especie A con respecto a ejes coordenados estacionarios (la palabra velocidad no expresa aquí la velocidad de una molécula individual de la especie A sino la suma de las velocidades de las moléculas de esta especie comprendidas en un pequeño elemento de volumen, dividido por el número

de dichas moléculas). Por lo tanto, la velocidad másica media para una especie de la mezcla de dos componentes podría definirse como:

$$v_A = n_A / \rho_A = N_A / c_A$$

Donde $N_A = n_A / M_A$ es la densidad de flujo molar de la especie A.

En resumen: $n = n_A + n_B = \rho_A v_A + \rho_B v_B = \rho v$

y también:

$$v = n / \rho = (n_A + n_B) / (\rho_A + \rho_B) = (\rho_A v_A + \rho_B v_B) / \rho = w_A v_A + w_B v_B$$

Si consideramos el flujo de las moles más bien que el de la masa podemos definir similarmente una velocidad molar media para la mezcla:

$$v^* = N / c = (N_A + N_B) / (c_A + c_B) = (c_A v_A + c_B v_B) / c = x_A v_A + x_B v_B$$

otras relaciones son:

$$(v - v^*) = w_A (v_A - v^*) + w_B (v_B - v^*)$$

$$(v^* - v) = x_A (v_A - v) + x_B (v_B - v)$$

Observamos pues que las densidades de flujo son magnitudes vectoriales que representan la masa (o los moles) de una especie que cruzan la unidad de área por unidad de tiempo. El movimiento puede estar referido a unas coordenadas estacionarias, pero también puede estar referido a un plano que avance a la velocidad media local molar v^* o másica v . Estas últimas pueden definirse como densidades de flujo superpuestas al flujo global o densidades de flujo difusionales:

$$J_A^* = c_A (v_A - v^*)$$

Que es la densidad de flujo molar relativa a la v^* , muy usada en difusión ordinaria, y

$$j_A = \rho_A (v_A - v)$$

Conocida como la densidad de flujo de masa del componente A con respecto a unos ejes que se mueven a la velocidad v , muy usado en la difusión térmica.

También podemos definir

$$j_A^* = J_A M_A$$

o densidad de flujo másico referida a la v^* , y

$$J_A = j_A / M_A$$

denominada densidad de flujo molar referido a la v .

Hacemos resaltar el hecho de que en general una densidad de flujo tiene un aporte difusional y uno convectivo, y que en el caso de la transferencia de masa, mientras la densidad de flujo total N , sea diferente de cero, existirá una contribución por arrastre $c_A v^*$ o $\rho_A v$ según el caso. En general tratándose de difusión en líquidos sin flujo convectivo neto, o en sólidos, este término puede despreciarse. No así en gases estancados donde omitirlo puede introducir serios errores en la estimación de los perfiles y las densidades de flujo.

Balances de materia.

El tema de fenómenos de transporte está íntimamente ligado con la predicción de variaciones de temperatura, concentración y/o velocidad dentro de un medio. Para obtener estos perfiles se utilizan dos conjuntos de ecuaciones: (1) Ecuaciones de balance o conservación y (2) Ecuaciones de velocidades o de densidades de flujo.

Recordemos que el balance general para un sistema es:

$$[\text{Velocidad de salida}] - [\text{Velocidad de entrada}] + [\text{Velocidad de acumulación}] = [\text{Velocidad de generación}]$$

o abreviadamente:

$$\text{Salida} - \text{Entrada} + \text{Acumulación} = \text{Generación.}$$

El sistema se define como la porción de universo bajo estudio. El resto del universo son los alrededores. El sistema puede ser una cantidad específica de materia o de volumen (frecuentemente llamado volumen de control). La velocidad de entrada se refiere a todo el flujo dentro del sistema (de la cantidad involucrada) a través de los límites del sistema, y la velocidad de salida se refiere a todo flujo que deje el sistema a través de sus límites. La diferencia de la segunda menos la primera es la velocidad neta de salida. La velocidad de generación se refiere a toda producción dentro del sistema, y la velocidad de acumulación se refiere a la velocidad de cambio con el tiempo de la cantidad total de masa, energía o cantidad de movimiento en el sistema y puede ser positivo o negativo.

Las ecuaciones de balance pueden aplicarse al sistema como un todo (balances globales o macroscópicos), a un incremento (balance incremental), o a un elemento diferencial (balance diferencial).

2.2. Introducción al Transporte de Cantidad de Movimiento y Dinámica de Fluidos.

Ahora que se han visto algunos ejemplos elementales de transporte de calor y masa, nos encontramos en mejores condiciones para comprender el tema de transporte de impulso. Dado que el impulso o la cantidad de movimiento de un cuerpo, se define como el producto de su masa por su velocidad, se puede pensar en la velocidad de un fluido en un punto dado como su impulso por unidad de masa. O sea que, los cambios en la velocidad de un fluido pueden originar transporte de cantidad de movimiento, así como los cambios de temperatura originan transporte de calor.

La descripción matemática de este transporte forma una parte importante de la ciencia de la mecánica de fluidos. Como el concepto de transporte de cantidad de movimiento generalmente no se enfatiza, debemos revisar algunas definiciones básicas.

Transporte de cantidad de movimiento entre placas paralelas. Flujo de Couette.

Consideremos un fluido contenido entre dos grandes placas paralelas (figura 2.2a). La distancia entre las placas es b , que es pequeña comparada con las otras dimensiones de las placas. En el tiempo $t = 0$ la placa inferior se pone en movimiento con velocidad constante $v_{x1} = V$ aplicando una fuerza F en la dirección x mientras la placa superior se deja estacionaria ($v_x = 0$). Al moverse la placa inferior arrastra consigo la capa de fluido inmediatamente adyacente, la que se mueve a la misma velocidad de la superficie. Esta es la condición de frontera denominada de "no deslizamiento" fundamentada experimental y teóricamente. Como la placa superior está estacionaria, la velocidad del fluido allí es cero. Pero la capa de fluido vecina a la placa inferior se mueve con respecto a la capa de fluido inmediatamente superior que inicialmente se encontraba en reposo y a su vez le imprime movimiento. De esta manera el movimiento de la placa inferior hace aparecer un campo de velocidades en el líquido, con la velocidad decreciendo continuamente desde V en la placa inferior hasta cero en la placa superior.

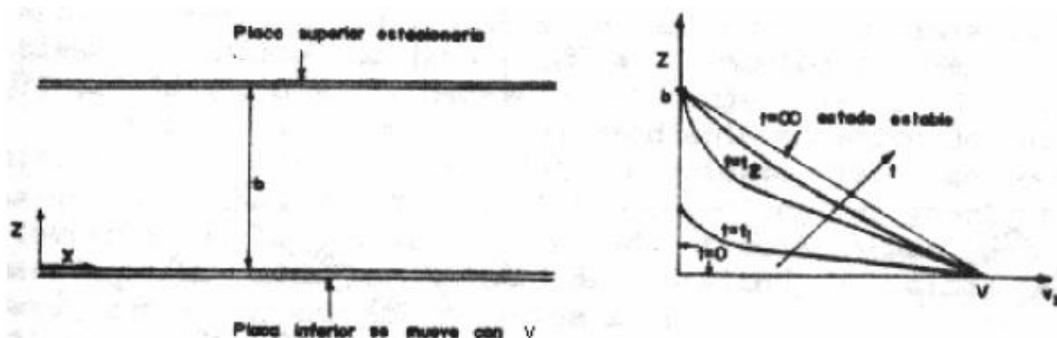


Figura 2.2.a y b

El movimiento de la placa inferior por tanto causa un aumento en v_x , la velocidad del fluido en la dirección x , desde cero hasta algún valor positivo. Como la cantidad de movimiento es proporcional a la velocidad, habrá un correspondiente aumento en la cantidad de movimiento x . En otras palabras, la cantidad de movimiento x se transporta en la dirección z desde la placa hasta el fluido y allí desde una capa de fluido a la siguiente.

En la figura 2.2b se grafican los perfiles de velocidad para varios tiempos. Para $t = 0$ hay un cambio brusco en $z = 0$ desde $v_x = V$ hasta $v_x = 0$. En $t = t_1$ la velocidad aumentó cerca del plano inferior, pero el impulso todavía no ha penetrado en el fluido cercano al plano superior. En $t = t_2$, la placa superior comienza a percibir el movimiento de la placa inferior. Finalmente en $t = \infty$ se obtiene estado estable en el cual la velocidad no vuelve a cambiar con el tiempo. El concepto de tiempo infinito es claramente una abstracción matemática. Para fluidos muy viscosos se puede requerir solo una fracción de segundo para alcanzar el 99 % de la condición de estado estable.

Ley de Newton de la viscosidad.

Continuemos considerando el flujo entre dos placas. Luego de un cierto periodo de tiempo el perfil alcanza su estado final estacionario (figura 2.2b). Una vez alcanzado dicho estado estacionario de movimiento es preciso aplicar una fuerza F_x constante para conservar el movimiento de la lámina inferior. Esta fuerza claramente depende de la velocidad V , de la naturaleza del fluido, de la distancia b entre las placas y del área de contacto S de las mismas con el líquido. Para este caso especial viene dada por:

$$\frac{F_x}{S} = \mu \frac{V}{b} = -\mu \frac{(0 - V)}{(b - 0)} \quad (2.3)$$

Es decir, que la fuerza por unidad de área es proporcional a la disminución de la velocidad con la distancia z . El coeficiente de proporcionalidad μ se denomina viscosidad del fluido.

Para desarrollar una expresión más general consideremos una de las curvas de la figura 2.2b antes de alcanzar el estado estacionario y la graficamos como v_x contra z a t constante. Considerando una región de espesor Δz en la cual la velocidad cambia en una cantidad Δv_x , la cual, usando la definición del operador diferencia se escribe como

$$\Delta v_x = v_x|_{(z+\Delta z, t)} - v_x|_{(z, t)}$$

Una ecuación consistente con la (2.3) será:

$$\frac{F_x}{S} = -\mu \frac{\Delta v_x}{\Delta z}$$

Donde la pendiente de la curva v_x contra z es $\Delta v_x/\Delta z$. Al tomar el límite cuando (z tiende a 0 nos aproximamos a la verdadera pendiente en z , la que está dada por la derivada parcial $\partial v_x/\partial z$. La ecuación básica resultante para el transporte de impulso unidireccional inestable es:

$$\tau_{zx} = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (2.4)$$

Llamada ley de Newton de la viscosidad en una dimensión. τ_{zx} es el esfuerzo cortante que se ejerce en la dirección x sobre la superficie de un fluido situada a una distancia z , por el fluido existente en la región donde z es menor. Los fluidos que obedecen la ecuación (2.4) se denominan newtonianos.

Muchos fluidos de importancia industrial y biológica no obedecen esta ley y se llaman no newtonianos. Algunos de ellos son la pasta dental, plásticos fundidos y soluciones poliméricas. Todos los gases y la mayoría de los líquidos simples, entre ellos el aire y el agua son fluidos newtonianos.

Según las consideraciones del numeral anterior τ_{zx} puede interpretarse también como la densidad de flujo viscoso de cantidad de movimiento x (densidad de flujo es velocidad de flujo por unidad de área, o sea que son unidades de cantidad de movimiento por unidad de tiempo y unidad de área) en la dirección z . Según la ecuación (2.4) se deduce que la densidad de flujo viscoso de cantidad de movimiento sigue la dirección del gradiente negativo de velocidad, es decir, la dirección de velocidad decreciente, tal como ocurre con la densidad de flujo de calor que es proporcional al gradiente negativo de temperatura o al de masa que es proporcional al gradiente negativo de concentración. Examinando la ecuación también vemos que μ tiene las dimensiones de masa por unidad de longitud y unidad de tiempo. Anteriormente se expresó en g/cm.s. o poise (P), o en unidades de 0.01P, conocidas como centipoises (cP). En el sistema internacional de unidades (SI) la viscosidad está dada en pascal segundo (Pa.s) donde $1 \text{ Pa.s} = 10 \text{ P} = 1000 \text{ cP} = 1 \text{ Kg/m.s}$

Fluidos no newtonianos.

Un fluido newtoniano se describió como uno en el cual el esfuerzo cortante es directamente proporcional a la velocidad de deformación, o sea la viscosidad es constante e independiente de la velocidad de deformación. Una gráfica de τ_{zx} contra $-\partial v_x/\partial z$ a presión y temperatura constantes, nos dará una línea recta para un fluido newtoniano pero se desviará de la línea recta para un fluido no newtoniano (figura 2.5). Este comportamiento más sencillo es el correspondiente a la curva A, que es una recta que pasa por el origen

de coordenadas. Las demás curvas de la figura 2.5 representan el comportamiento reológico de líquidos llamados no Newtonianos. Algunos líquidos como lodos, no fluyen hasta que se alcanza un esfuerzo cortante mínimo, que se representa por τ_0 , y después fluyen linealmente para esfuerzos cortantes superiores. La curva B es un ejemplo de este comportamiento. Los líquidos que se comportan de esta forma reciben el nombre de Plásticos de Bingham. La línea C representa un fluido pseudoplástico. La curva pasa por el origen, es cóncava hacia abajo para bajos esfuerzos cortantes haciéndose recta para esfuerzos cortantes elevados. El látex del caucho es un ejemplo de un fluido de éste tipo. La curva D representa un fluido dilatante. La curva es cóncava hacia arriba para bajos esfuerzos cortantes y se hace lineal para esfuerzos cortantes elevados. La arena movediza y algunas emulsiones de arena presentan éste comportamiento.

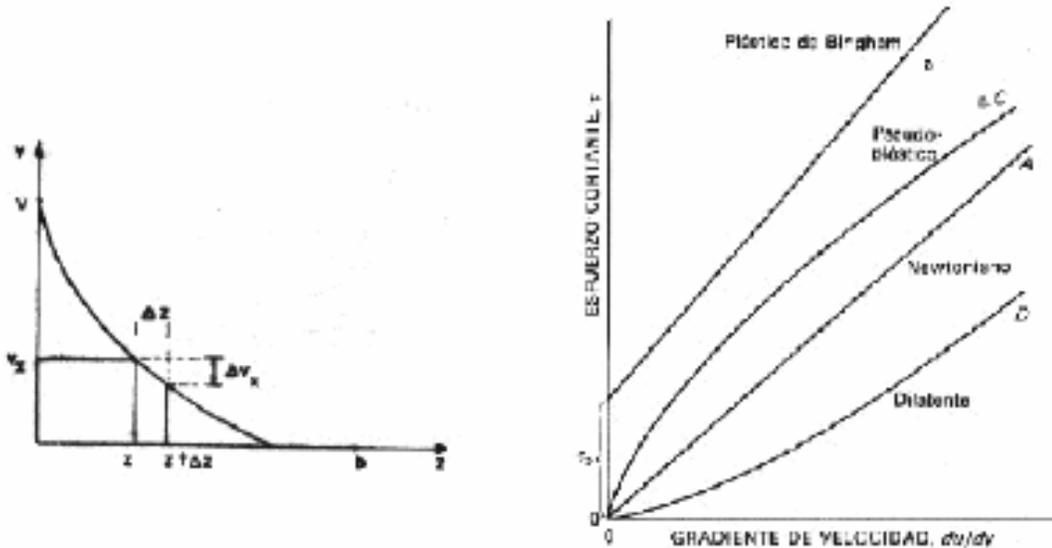


Figura 2.5.

Esfuerzo cortante frente a gradientes de velocidad para fluidos no newtonianos.

Los plásticos de Bingham como los representados por la curva B siguen una ecuación reológica del tipo

$$\tau_{yx} = -\mu_0 \frac{dv_x}{dy} \pm \tau_0 \dots \text{si} \dots |\tau_{yx}| > \tau_0; \dots \frac{dv_x}{dy} = 0 \dots \text{si} \dots |\tau_{yx}| < \tau_0$$

Los fluidos diletantes y pseudoplásticos siguen con frecuencia la ecuación de la ley de la potencia n , donde $n = 1$ para fluidos newtonianos, $n > 1$ para un fluido diletante o que aumenta la viscosidad con el esfuerzo, y $n < 1$ para fluidos pseudoplásticos o sea que el coeficiente disminuye al aumentar el gradiente.

$$\tau_{yx} = -m \left| \frac{dv_x}{dy} \right|^{n-1} \frac{dv_x}{dy}$$

Esta ecuación es llamada también modelo de Ostwald de Waele. Los parámetros m y n son constantes que reciben el nombre de índice de consistencia de flujo e índice de comportamiento de flujo, respectivamente.

Número de Reynolds para fluidos no newtonianos.

Puesto que los fluidos no Newtonianos no tienen un único valor de la viscosidad independiente del esfuerzo cortante, no puede utilizarse la ecuación para el número de Reynolds. La definición del número de Reynolds para tales fluidos es algo arbitraria; una definición ampliamente utilizada para fluidos de la ley de la potencia es

$$\text{Re} = 2^{3-n} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n \frac{D^n \rho V^{2-n}}{m}$$

Para el número de Reynolds crítico correspondiente a la transición a flujo turbulento, se ha propuesto la siguiente ecuación

$$\text{Re} = 2100 \frac{(4n+2)(5n+3)}{3(3n+1)^2}$$

que está de acuerdo con las observaciones de que la iniciación de la turbulencia ocurre para números de Reynolds superiores a 2100 con fluidos pseudoplásticos ($n < 1$).

2.3. ANALOGÍAS ENTRE LOS TRES FENÓMENOS DE TRANSPORTE.

Hasta ahora se han usado los mismos modelos básicos para desarrollar las siguientes leyes de flujo (ecuaciones constitutivas o expresiones fenomenológicas) para el transporte de energía, masa y cantidad de movimiento:

Energía	$q_z = -k (\partial T / \partial z)$	Ley de Fourier.
Materia	$J_{Az} = -D_{AB} (\partial c_A / \partial z)$	Ley de Fick
Cantidad de movimiento unidireccional	$\tau_{zx} = -\mu (\partial v_x / \partial z)$	Ley de Newton de la viscosidad.

Tabla 1.6.

En cada caso las ecuaciones toman la forma:

$$\text{Densidad de Flujo} = (\text{Propiedad de Transporte}) \times (\text{Gradiente de Potencial})$$

Donde k , D_{AB} y μ se llaman las propiedades de transporte moleculares, y T , c_A y v_x son los potenciales. Aunque estas ecuaciones son similares ellas no son completamente análogas debido a que las propiedades de transporte tienen unidades diferentes. Notando que las dimensiones de la difusividad másica son [longitud al cuadrado/tiempo], podemos definir difusividades para calor y cantidad de movimiento como

Difusividad Térmica:

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}, \text{ donde } C_p \text{ es capacidad calorífica a presión constante.}$$

Difusividad de cantidad de movimiento:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \text{ llamada también viscosidad cinemática.}$$

Suponiendo que C_p y ρ son constantes reescribimos las leyes de flujo como:

Energía Térmica

$$q_z = -\alpha \frac{\partial(\rho C_p T)}{\partial z}$$

Masa de A

$$J_{Az} = -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial z}$$

o similarmente

$$j_{Az} = -D_{AB} \frac{\partial \rho_A}{\partial z}$$

Cantidad de Movimiento

$$\tau_{zx} = -\nu \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial z}$$

Notemos que $(\rho C_p T)$ tiene unidades de energía por unidad de volumen o concentración de energía por analogía con c_A (moles de A por unidad de

volumen) o ρ_A (masa de A por unidad de volumen). Además ρv_x tiene dimensiones de cantidad de movimiento por unidad de volumen y puede interpretarse como concentración de cantidad de movimiento. Aquí las leyes de flujo están escritas en la forma difusional:

$$\text{Flujo} = - \text{Difusividad} \times \text{Gradiente de Concentración.}$$

Podemos generalizar esta similitud y escribirla como $\Pi_{mz} = -\beta(\partial\Psi/\partial z)$, siendo Π_{mz} cualquiera de las densidades de flujo difusivas, β cualquiera de las difusividades y Ψ cualquiera de las concentraciones. Aunque en este capítulo no vimos transferencia convectiva neta de calor ni de cantidad de movimiento, observamos que cuando hay transferencia de masa, este hecho puede generar una densidad de flujo convectiva neta que representamos por $\rho_A v_z$. Podemos extender la analogía para cubrir esta situación diciendo entonces que las densidades de flujo pueden tener componente difusiva Π_m y componente convectiva $\Pi_{Cz} = \Psi v_z$. Esto lo podemos extender para un sistema multidireccional y nos será de mucha utilidad en los balances generalizados.

Como las difusividades poseen las mismas dimensiones, su relación nos dará cantidades adimensionales:

Número de Prandtl: $Pr = \nu/\alpha$

Número de Schmidt: $Sc = \nu/D_{AB}$

Número de Lewis: $Le = \alpha/D_{AB} = Sc/Pr$.

Estas cantidades aparecen en situaciones donde hay transporte simultáneo de calor e impulso; masa e impulso; o calor y masa respectivamente.

CONCLUSIONES

En el desarrollo de esta asignatura he presentado los conceptos más importantes utilizados en mi experiencia práctica de laboratorio como así también de aplicabilidad en campo.

Es una materia más extensa y completa ya que, en los últimos 40 años, los campos de aplicación de los fenómenos de transporte se han ampliado últimamente como ser la biotecnología, la nanotecnología y la ciencia de los polímeros.

BIBLIOGRAFÍA

- Nicholas P. Cheremisinoff, Ph.D. *Handbook of Hazardous Chemical Properties*. Butterworth - Heinemann. 2000
- J.H. Lienhard IV (Houston University) and J.H. Lienhard V (MIT). *Heat Transfer Handbook*. Phlogistong Press. 2003
- Gregory K. McMillan Editor-in-Chief, Douglas M. Considine Late Editor-in-Chief. *Process/Industrial Instruments And controls Handbook*. Mcgraw- Hill. 1999
- *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Wiley. 2002 Fifth Edition.
- Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot. *Fenómenos de Transporte*. Reverté, S.A. 1997
- *Simulación de Procesos en Ingeniería Química*. Plaza y Valdez, S.A.2000
- Himmelblau. *Introducción a los cálculos de Ingeniería Química*. PRENTICE-HALL. 1997
- <http://mipagina.cantv.net/ulacoa/clases.htm>
- <http://www.virtual.unal.edu.co>
- Hougen Olaf, Watson Kenneth. *Principios de los Procesos Químicos, Tomo 3*. Editorial Geminis S.R.L. Bs. As. 1997
- Perry. *Manual del Ingeniero Químico*, 6ta edición, Mc Graw Hill.
- Nicolás J. Scenna y otros. *Modelado, Simulación y Optimización de Procesos Químicos*. UTN 1999.
- Oil Analysis Dictionary. 2001. *oilanalysis.com*, USA. Definición de Viscosidad (Viscosity). <http://www.oilanalysis.com/dictionary>
- Gugliotti, M. *Surface tension in the lungs*. The Alchemist 15 September, 2000.
- Franzen, S. 2001. *Lipids and Membranes*. N. Carolina St. Univ. website. <http://chsfpc5.chem.ncsu.edu/CH795I/lectures>

- Shakhashiri, B.Z. 2000. *Diffusion of a Liquid*. In: Demonstration Lab. Univ. Wisconsin-Madison website.
- Gilson, M. 2000. *Chapter 4: Introduction to Continuum Electrostatics, with Molecular Applications*. In: *Channels, Receptors, and Transporters*. L.J. DeFelice, Vol. Ed., BTOL, Biophys. Soc.